На правах рукописи

Макаренко
Андрей Николаевич

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ С ВЕКТОРАМИ КИЛЛИНГА

01.04.02 Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Томск
2001

Диссертация выполнена на кафедре теоретической физики Томского государственного педагогического университета

Научный руководители:
В.В. Обухов,
доктор физико-математических наук, профессор;
К.Е. Осетрин,
кандидат физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты:
А.Ю. Трифонов,
доктор физико-математических наук, профессор;
И.В. Широков,
доктор физико-математических наук, профессор

Ведущая организация: Томский государственный университет

Защита состоится «27» декабря 2001 года в 12 часов на заседании диссертационного совета К 212.266.01 по присуждению ученых степеней по специальности 01.04.02 (теоретическая физика) в Томском государственном педагогическом университете по адресу: 634041, г. Томск, пр. Комсомольский, 75, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотек дарственного педагогического университета.

Автореферат разослан «27» ноября 2001 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат педагогических наук,
доцент Е.А. Румбешта

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации

Уравнения Эйнштейна, описывающие геометрию пространства-времени, играют фундаментальную роль в современной теоретической физике. Вообще говоря, их анализ представляет собой чрезвычайно сложную задачу. Однако в ряде случаев, наложив те или иные дополнительные ограничения, удается найти точное решение или хотя бы провести качественное исследование получившихся уравнений. Существует несколько способов наложения ограничений на пространство-время, например, алгебраическая классификация тензора Вейля (типы по Петрову) и тензора Риччи (типы Плебанского), выбор тензора энергии-импульса из физических соображений, наличие групп симметрий действующих на многообразии.

Групповой подход к изучению геометрии пространства является наиболее плодотворным с точки зрения описания гравитационного поля инвариантными свойствами метрики, определяемой полем, не зависящем от системы отнесения. Действительно, если метрика в одной системе координат допускает группу Ли G непрерывных преобразований, сохраняющую метрику, то это будет иметь место и в любой другой системе координат. Действие группы Ли G на пространственно-временном многобразии задается генераторами группы, которые удовлетворяют уравнению Киллинга и, следовательно, именно пространства с векторами Киллинга представляют с этой точки зрения наибольший интерес.

В диссертации рассматриваются однородные пространтства и конформно - штеккелевы метрики. Их объединяет существование в пространстве наборов, состоящих из трех геометрических объектов (для конформно-штеккелевых пространств - конформных векторных и тензорных полей Киллинга, для однородных пространств - векторных полей Киллинга). Для того и другого случая полевые уравнения удается свести к системе конечного (но достаточно большого) числа обыкновенных дифференциальных уравнений. В математической физике имеется большое количество методов исследования подобных систем уравнений. В качестве примера можно привести методы исследование дополнительных симметрий системы уравнений, гамильтонову формулировку, теорию динамических систем и т.д.

Интерес с физической точки зрения обусловлен той ролью, которую играют рассматриваемые пространства в современной теоретической физике. Так, например, несомненный интерес для космологии и теории гравитации представляют однородные пространства, лежащие, по существу, в основе современной космологии. На базе однородных пространств строят модели Большого взрыва, начальных сингулярностей, а также инфляционные модели. Представляет интерес и выяснение различных механизмов изотропизации Вселенной. Однородные пространства используют в различных современных теориях гравитации для исследования общих закономерностей в картине развития Вселенной. На фоне однородных пространств изучается воздействие гравитационного поля на другие поля и вещество. Такие исследования часто проводятся на базе заданного гравитационного поля – обычно точного решения уравнений Эйнштейна.

Все это является причиной того, что однородные пространства в настоящее время вызывают повышенный интерес у исследователей. Вместе с тем их широкое применение осложнено двумя обстоятельствами. Во-первых, они заданы с достаточно большим произволом, и метрики этих пространств, даже записанные в системах координат, связанных с синхронными системами отсчета, в общем случае имеют довольно сложный вид. Во-вторых, с точки зрения космологии наиболее интересными представителями однородных пространств являются такие, в которых существуют решения уравнений материи, позволяющие построить зависящие только от временной переменной тензоры материи. Поэтому возникает проблема изучения всех типов однородных пространств на предмет нахождения среди них классов пространств, в которых могут быть получены соответствующие решения.

Интерес к штеккелевым и конформно-штеккелевым пространствам обусловлен в первую очередь тем фактом, что только для них существует возможность поставить проблему полного разделения переменных в квантовых и волновых уравнениях движения.

По существу разделение переменных является единственным известным в настоящее время конструктивным методом интегрирования данных уравнений. Цель метода состоит в классификации всех привилегированных систем координат и внешних электромагнитных полей, в которых возможно разделение переменных. Под классификацией понимается перечисление всех соответствующих пространственно-временных метрик и электромагнитных потенциалов (неэквивалентных относительно допустимых преобразований координат и градиентных преобразований потенциалов), удовлетворяющих требованию полного разделения переменных в уравнениях движения пробной частицы.

При этом с физической точки зрения наибольший интерес представляют пространства, удовлетворяющие системе полевых уравнений какой-либо гравитационной теории. В настоящее время наиболее хорошо изучена проблема классификации вакуумных и электровакуумных штеккелевых пространств. Штеккелевыми называются пространства, в которых уравнение Гамильтона-Якоби для незаряженной массивной частицы интегрируется методом полного разделения переменных.

Цель работы

Цель диссертационной работы заключалась в решении следующих задач:

- Изучить условия совместности уравнений Эйнштейна при конформном отображении штеккелевых пространств на пространства Эйнштейна.
- Исследовать условия интегрируемости самосогласованной системы уравнений Эйнштейна-Вейля для всех типов по классификации Бианки.
- Проинтегрировать самосогласованную систему уравнений Эйнштейна-Вейля для I типа по классификации Бианки.

Научная новизна и практическая ценность работы

В работе получены следующие результаты.

Изучены условия совместности уравнений Эйнштейна, при конформном отображении штеккелевых пространств на пространства Эйнштейна. Показано, что данное отображение является не тривиальным только для конформно-плоских пространств или для штеккелевых метрик типа (1.1). Здесь под тривиальным понимается конформное отображение штеккелевых пространств на штеккелевы пространства (для данного отображения конформный фактор не зависит от неигнорируемых переменных).

Изучены условия интегрируемости самосогласованных системы уравнений Эйнштейна - Вейля.

Получено точное решение самосогласованной системы уравнений Эйнштейна - Вейля для I типа по классификации Бианки.

Публикации

Материалы, изложенные в диссертации, опубликованы в 6 работах.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из Введения, четырех глав, Заключения и списка литературы содержащего 105 источников. Общий объем составляет страниц 104 страницы.

Содержание работы

Во **Введении** обоснована актуальность выбранной темы, изложен краткий обзор литературы и дано описание структуры диссертации.

В **первой** главе диссертации "Конформно-штеккелевы метрики пространств Эйнштейна" рассмотрены условия интегрируемости уравнений Эйнштейна для случая конформно-штеккелевых пространств. Показано, что для всех штеккелевых метрик, не сводящихся к типу (1.1), нетривиальное конформное отображение на пространства Эйнштейна возможно только для конформно - плоских пространств.

В первом разделе предлагается краткий обзор теории полного разделения переменных и вытекающей из нее теории штеккелевых пространств. Сформулированы основные определения и теоремы, приведен явный вид метрик для всех неэквивалентных типов штеккелевых метрик.

Во втором разделе рассмотрены условия Бринкмана (условия совместности уравнений Эйнштейна) для конформно-штеккелевых метрик в отсутствии материи с ненулевой космологической постоянной. Эти условия представимы в виде дифференциальных уравнений на конформный фактор ω и тензор Вейля $C^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma}$:

$$\nabla_{\delta}\left(C^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma}\exp\left(n-3\right)\omega\right)=0.$$

Предложен наиболее удобный для работы вид этих условий в формализме Ньюмена-Пенроуза:

$$\begin{aligned}
\Psi_0\Delta\omega-\Psi_1\delta\omega-\delta\Psi_1+\Delta\Psi_0-\Psi_0(4\gamma-\mu)+2\Psi_1(\beta+2\tau)-3\Psi_2\sigma &= 0,\\
\Psi_0\bar\delta\omega-\Psi_1D\omega-D\Psi_1+\bar\delta\Psi_0-\Psi_0(4\alpha-\pi)+2\Psi_1(\varepsilon+2\rho)-3\Psi_2\kappa &= 0,\\
\Psi_1\Delta\omega-\Psi_2\delta\omega-\delta\Psi_2+\Delta\Psi_1-\Psi_0\nu-2\Psi_1(\gamma-\mu)+3\Psi_2\tau-2\Psi_3\sigma &= 0,\\
\Psi_1\bar\delta\omega-\Psi_2D\omega+\bar\delta\Psi_1-D\Psi_2-\Psi_0\lambda-2\Psi_1(\alpha-\pi)+3\Psi_2\rho-2\Psi_3\kappa &= 0,\\
\Psi_2\Delta\omega-\Psi_3\delta\omega-\delta\Psi_3+\Delta\Psi_2-2\Psi_1\nu+3\Psi_2\mu+2\Psi_3(\tau-\beta)-\Psi_4\sigma &= 0,\\
\Psi_2\bar\delta\omega-\Psi_3D\omega-D\Psi_3+\bar\delta\Psi_2-2\Psi_1\lambda+3\Psi_2\pi+2\Psi_3(\rho-\varepsilon)-\Psi_4\kappa &= 0,\\
\Psi_3\Delta\omega-\Psi_4\delta\omega-\delta\Psi_4+\Delta\Psi_3-3\Psi_2\nu+2\Psi_3(2\mu+\gamma)+\Psi_4(\tau-4\beta) &= 0,\\
\Psi_3\bar\delta\omega-\Psi_4D\omega+\bar\delta\Psi_3-D\Psi_4-3\Psi_2\lambda+2\Psi_3(2\pi+\alpha)+\Psi_4(\rho-4\varepsilon) &= 0.
\end{aligned}$$

где D, Δ, δ, $\bar\delta$ – дифференциальные операторы вдоль изотропной тетрады Ньюмена - Пенроуза, Ψ_i – тетрадные компоненты тензора Вейля.

В третьем разделе приведены основные теоремы, полученные для изотропных штеккелевых пространств, которые утверждают, что единственным не тривиальным отображением будет отображение пространств типа (1.1) или конформно - плоских пространств.

В четвертом разделе найдены условия Бринкмана для типа (3.0) с неигнорируемым временем, которые принимают вид:

$$\begin{aligned}
\Psi_0(D\omega-\Delta\omega)+2\Psi_1\delta\omega &= 0,\\
\Psi_1(D\omega-\Delta\omega)-2\Psi_0\bar\delta\omega &= 0,\\
\Psi_1(D\omega-\Delta\omega)+2\Psi_2\delta\omega &= 0,\\
\Psi_2(D\omega-\Delta\omega)-2\Psi_1\bar\delta\omega &= 0.
\end{aligned}$$

Тетрада Ньюмена-Пенроуза выбрана следующим образом:

$$l_i=\frac{1}{\sqrt2}(1,A,B,K),\qquad n_i=\frac{1}{\sqrt2}(1,-A,-B,-K),\qquad m_i=\frac{1}{\sqrt2}(0,0,W,H+iV),$$

где все функции зависят только от неигнорируемой временной переменной.

Из условий совместности следует, что или $\Psi_i = 0$, или конформный фактор не зависит от неигнорируемых переменных, то есть имеет место отображение на штеккелево пространства.

В **пятом разделе** рассматриваются условия совместности для типа (3.0) с игнорируемой временной переменной. В этом случае возникают следующие условия совместности:

$$\begin{aligned}
&\Psi_0(D\omega+\Delta\omega)=2\Psi_1\delta\omega,\\
&\Psi_1(D\omega+\Delta\omega)=2\Psi_0\overline{\delta}\omega,\\
&\Psi_1(D\omega+\Delta\omega)=2\Psi_2\delta\omega,\\
&\Psi_2(D\omega+\Delta\omega)=2\Psi_1\overline{\delta}\omega,\\
&\Psi_0\Delta\omega-\Psi_1\delta\omega-\Psi_0{}'-\Psi_0(4\overline{\varepsilon}-\rho)+\Psi_1(\kappa+5\tau)-3\Psi_2\sigma=0,\\
&\Psi_0\overline{\delta}\omega-\Psi_1D\omega-\Psi_1{}'-\Psi_0(2\overline{\kappa}+\overline{\tau})+2\Psi_1(\varepsilon+2\rho)-3\Psi_2\kappa=0,\\
&\Psi_1\Delta\omega-\Psi_2\delta\omega-\Psi_1{}'-\Psi_0\overline{\kappa}-2\Psi_1(\overline{\varepsilon}-\rho)-2\overline{\Psi}_1\sigma+3\Psi_2\tau=0,\\
&\Psi_1\overline{\delta}\omega-\Psi_2D\omega-\Psi_2{}'-\Psi_0\overline{\sigma}-\Psi_1(\overline{\kappa}-\overline{\tau})+3\Psi_2\rho-2\overline{\Psi}_1\kappa=0.
\end{aligned}$$

Тетрада Ньюмена-Пенроуза имеет следующий вид:

$$\ell_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(A,1,B,C),\qquad n_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(A,-1,B,C),\qquad m_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(iF,0,iK,S+iH),$$

где все функции зависят от неигнорируемой пространственной переменной.

Из условий совместности следует, что или конформный фактор не зависит от неигнорируемых переменных, или имеет место следующие соотношения на компоненты тензора Вейля:

$$\begin{aligned}
\Psi_0\overline{\Psi}_0&=\Psi_1\overline{\Psi}_1\\
\Psi_1\overline{\Psi}_1&=(\Psi_2)^2\\
\Psi_0\overline{\Psi}_1&=\Psi_2\Psi_1
\end{aligned}$$

Это условие поворотом тетрады легко привести к виду: $\Psi_0=\Psi_1=\Psi_2=\Psi_3=\Psi_4$. Таким образом, это пространство типа N по классификации Петрова. Теперь, используя уравнения Эйнштейна, можно показать, что данное пространство будет пространством Эйнштейна только для конформно-плоских пространств.

В **шестом и седьмом разделах** тоже самое проделано для типа (2.0) с игнорируемой и неигнорируемой временной переменной.

Следовательно, можно утверждать, что нетривиальное отображения штеккелевых пространств не сводящихся к типу (1.1) на пространства Эйнштейна возможно только в случае конформно-плоских пространств.

Во **второй главе** "Однородные космологические модели" рассматривается понятие и основные свойства однородных космологических моделей.

Однородными космологическими моделями называются пространственно - временные многообразия V_4, на которых заданна метрика ds^2, удовлетворяющая уравнениям Эйнштейна и инвариантная относительно некоторой трехмерной группы Ли G преобразований многообразия V_4, действующей с трехмерными орбитами. Напомним, что под орбитами понимается множество точек, получаемых из данной точки действием всех преобразований группы G.

Пространства, заданные подобным образом, обладают глубокими симметриями и являются наиболее простыми и вместе с тем естественными моделями многих астрофизических и космологических явлений.

В **первом разделе** дано определение однородных космологических моделей, приведены необходимые сведения из теории групп Ли. В частности, показано, что метрика в базисе левоинвариантных векторных полей зависит только от времени. В результате чего, переходя в соответствующую тетраду, система полевых уравнений становится системой конечного (но достаточно большого) числа обыкновенных дифференциальных уравнений, одним из способ интегрирования которой является построение классификации.

Всякая классификация V_n по группам движения необходимо связывается со структурой исследуемых групп, т.е. со структурными константами группы. Зная структуру группы, можно определить наиболее простую голономную систему координат, связанную с этой структурой, и операторы группы относительно этой системы координат. После этого определение V_n с данной группой сводится к интегрированию уравнений Киллинга с неизвестными функциями $g_{\alpha\beta}$. Впервые данная классификации для трехмерных однородных пространств была построена Бианки, она насчитывает девять неэквивалентных типов различающихся наборами структурных констант. В данном разделе приведены вид коммутационных соотношений для всех типов, вектора Киллинга и соответствующие им метрики.

Во **втором разделе** получено уравнение на тетраду, содержащие помимо искомой тетрады, векторное поле Киллинга:

$$e^{\alpha}_{(a),\beta} = \xi^{\alpha}_{(b),\gamma}\xi^{(b)}_{\beta}e^{\gamma}_{(a)}.$$

Интегрируя получившееся уравнение в работе найдены тетрады для всех типов, также вычислены квадраты тетрадных векторов и вид метрики на тетраде.

В **третьем разделе** приведены необходимые для дальнейшей работы сведения из формализма Ньюмена-Пенроуза, переход в который обусловлен нескольким факторами. Во-первых, данный формализм приспособлен для работы с пространствами лоренцовой сигнатуры и, во-вторых, в качестве материи выбирается безмассовое спинорное поле, наличие которого требует перехода в неголономный базис.

В третьей главе "Интегрируемость уравнений Эйнштейна-Вейля для однородных космологических моделей" исследуется система уравнений Эйнштейна для однородных космологических моделей с безмассовым спинорным полем. Показано, что получающаяся система уравнений является интегрируемой для всех типов по классификации Бианки, исключение составляют некоторые подслучаи типов VII и IX, для которых в связи с громоздкостью возникающих систем уравнений не удалось провести доказательство совместности.

В первом разделе рассматриваются первые шесть типов по классификации Бианки. Для них удается записать единую тетраду, отличающуюся параметрами. Раздел содержит подразделы, в которых исследуются возникающее в ходе работы подклассы. Задача распадется на два больших класса в зависимости от значения нулю одного из оптических скаляров, а именно ω.

$$\omega^2 = -1/4(\rho - \overline{\rho})^2.$$

Этот оптический скаляр имеет простую интерпретацию: если он равен нулю, то конгруэнции световых геодезических не могут вращаться. Если $\omega \neq 0$ (метрики допускающие вращения), в этом случае из уравнений Эйнштейна можно найти выражения для комбинаций спинора Вейля $\xi_0\xi_{0'}$, $\xi_1\xi_{1'}$ и $\xi_0\xi_{1'}$ через спиновые коэффициенты. Тем самым система уравнений Эйнштейна-Вейля распадается на две подсистемы. Одна подсистема содержит только спиновые коэффициенты, в другую входят спиноры. Преобразуя первую подсистему, можно привести ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме. Причем число неизвестных равно числу уравнений. Подобные системы являются интегрируемыми и, следовательно, можно найти спиновые коэффициенты.

Вторая подсистема содержит выражения спинорных комбинаций через спиновые коэффициенты и дифференциальные уравнения на спиноры (уравнения движения). Можно показать, что они совместны, то есть дифференцируя спинорные комбинации и сравнивая их с подобными комбинациями собранными из уравнений движения получим тождества.

Таким образом, можно утверждать, что самосогласованная система уравнений Эйнштейна-Вейля является совместной и интегрируемой.

Приведем для примера систему уравнений для III, IV и VI типов по классификации Бианки (различные наборы a_1, a_2, a_3 нумеруют типы), нижний индекс у спиновых коэффициентов соответствует вещественной – 1 и мнимой – 2 части.

$$\begin{aligned}
D\varepsilon_1 &= \frac{1}{2a_1^2\rho_2}\big(- a_1^2\rho_2^3 + 2a_1\kappa_1(-a_1(2\varepsilon_1 + \rho_1) + (a_1 + 2a_2)\sigma_1)\tau_2 + \\
&+ \rho_2(a_1^2(H - 4\varepsilon_1^2 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 8\varepsilon_1\rho_1 - \rho_1^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2) + 2a_1^2\kappa_2\tau_2 + \\
&+ (9a_1^2 + 8a_1a_2 + 4a_2^2)\tau_2^2)\big), \\
D\rho_1 &= \frac{1}{a_1\rho_2}(a_1\rho_2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\varepsilon_1\rho_1 + \rho_1^2 - \rho_2^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \\
&+ (-a_1\kappa_1(2\varepsilon_1 + \rho_1) + 2a_1\kappa_2\rho_2 + (a_1 + 2a_2)\kappa_1\sigma_1)\tau_2 +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad (3a_1+2a_2)\rho_2\tau_2^2),\\
D\rho_2 &= 2(\varepsilon_1+\rho_1)\rho_2+\frac{2(-a_1+a_2)}{a_1}\kappa_1\tau_2,\\
D\sigma_1 &= -2(\varepsilon_1-\rho_1)\sigma_1-\frac{\kappa_1(2a_1\varepsilon_1+a_1\rho_1-(a_1+2a_2)\sigma_1)\tau_2}{a_1\rho_2}+\\
&+ \quad \frac{2(a_1-a_2)}{a_1}\tau_2^2,\\
D\sigma_2 &= \frac{1}{a_1\rho_2}(a_1+2a_2)\sigma_1\tau_2(\kappa_2+\tau_2)+a_1\rho_1(2\rho_2\sigma_2-\tau_2(\kappa_2+\tau_2))-\\
&- \quad 2a_1\varepsilon_1(\rho_2\sigma_2+\tau_2(\kappa_2+\tau_2)),\\
D\kappa_1 &= \frac{1}{2a_1^3\rho_2}(-4a_1^3\kappa_1(\varepsilon_1-\rho_1)\rho_2+a_1^2((-a_1+a_2)H+8a_1\varepsilon_1^2+\\
&+ \quad 8a_2\varepsilon_1(\rho_1-\sigma_1)-2((a_1-a_2)\kappa_1^2+a_1\kappa_2^2-a_2\kappa_2^2-2a_1\rho_1^2+a_2\rho_1^2-\\
&- \quad 3a_1\rho_2^2-a_2\rho_2^2+2a_2\rho_1\sigma_1+(2a_1+a_2)\sigma_1^2)-2(a_1-a_2)\sigma_2^2)\tau_2-\\
&- \quad 4a_1^2(a_1-a_2)\kappa_2\tau_2^2-2(5a_1^3-a_1^2a_2-4a_2^3)\tau_2^3),\\
D\kappa_2 &= -\frac{1}{a_1\rho_2}(2a_1\kappa_2(\varepsilon_1-\rho_1)\rho_2+(2a_1\varepsilon_1(\rho_2-\sigma_2)-\\
&- \quad a_1\rho_1(\rho_2+\sigma_2)+\sigma_1-(-a_1\rho_2+(a_1+2a_2)\sigma_2))\tau_2),\\
D\tau_2 &= \tau_2(\rho_1-\sigma_1),
\end{aligned}
$$

где H – космологическая посоянная, а $D=\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_t$.

Как видно, данная система не содержит спиноров, они выражаются через спиновые коэффициенты:

$$
\begin{aligned}
k\xi_0\xi_{0'} &= \frac{1}{8\rho_2}(H+2\kappa_1^2+2\kappa_2^2+8\varepsilon_1\rho_1-2\rho_1^2+2\rho_2^2+2\sigma_1^2-\\
&- \quad 4\rho_2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\kappa_2\tau_2+10\tau_2^2+8a_2/a_1\tau_2^{+}8a_2^2/a_1^2\tau_2^2),\\
k\xi_1\xi_{1'} &= \frac{1}{8\rho_2}(H+2\kappa_1^2+2\kappa_2^2+8\varepsilon_1\rho_1-2\rho_1^2+2\rho_2^2+2\sigma_1^2+\\
&+ \quad 4\rho_2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\kappa_2\tau_2+10\tau_2^2+8a_2/a_1\tau_2^2+8a_2^2/a_1^2\tau_2^2),\\
k(\xi_0\xi_{1'}-\xi_1\xi_{0'}) &= i(\kappa_2+\tau_2),\\
k(\xi_0\xi_{1'}+\xi_1\xi_{0'}) &= \frac{-a_1\kappa_1\rho_2+(-2a_1\varepsilon_1-a_1\rho_1+a_1\sigma_1+2a_2\sigma_1)\tau_2}{a_1\rho_2},
\end{aligned}
$$

где k – константа.

Уравнения движения (уравнения Вейля) имеют вид:

$$
\dot{\xi}_0=\xi_0(\rho_1-\varepsilon_1+\frac{i}{2}(\rho_2+\sigma_2))-\xi_1(\frac{\kappa_1}{2}+i(\frac{\kappa_2}{2}+\frac{3a_1+2a_2}{2a_1}\tau_2)),
$$
$$
\dot{\xi}_1=\xi_0(\frac{\kappa_1}{2}+i(-\frac{\kappa_2}{2}+\frac{a_1+2a_2}{2a_1}\tau_2))+\xi_1(\rho_1-\varepsilon_1+\frac{i}{2}(\rho_2-\sigma_2)).
$$

При условии $\omega = 0$ не удается выразить всех спинорных комбинаций из уравнений Эйнштейна, однако, используя уравнения движения, удается собрать систему обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме с числом уравнений равным числу неизвестных. Те спинорные комбинации, которые удается выразить через спиновые коэффициенты, совместны с уравнениями движения, то есть, дифференцируя их мы не получим новых уравнений. Также появляется уравнение, не содержащее дифференциалов и спинорных комбинаций (входят только спиновые коэффициенты). Дифференцируя его, легко убедиться, что оно является дифференциальным следствием основной системы. С его помощью можно понизить ее порядок на единицу. Таким образом, для этого случая показано, что система уравнений Эйнштейна-Вейля также совместна и интегрируема.

Приведем вид уравнений для I типа; для него не удается выразить ни одной комбинации спиноров:

$$\begin{aligned}
D\varepsilon_1 &= \frac{\kappa_1^2+\kappa_2^2+\rho_1^2-\sigma_1^2-\sigma_2^2}{2} - 2\varepsilon_1^2 + 2(\Xi_2\kappa_1 - C_1\kappa_2),\\
D\rho_1 &= 2\kappa_1^2 + 2\kappa_2^2 + 2\varepsilon_1\rho_1 + \rho_1^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2(\Xi_2\kappa_1 - C_1\kappa_2),\\
D\sigma_1 &= 2(\sigma_1(\rho_1-\varepsilon_1) + \sigma_2(a\xi_1\xi_{1'} - a\xi_0\xi_{0'} - \sigma_2)) - \kappa_2^2 + \kappa_1^2 +\\
&+ 2(\Xi_1\kappa_2 + \Xi_2\kappa_1),\\
D\sigma_2 &= 2(\sigma_2(\rho_1-\varepsilon_1) - \sigma_1(a\xi_1\xi_{1'} - a\xi_0\xi_{0'} - \sigma_2) + \kappa_1\kappa_2 +\\
&+ \Xi_2\kappa_2 - \Xi_1\kappa_1),\\
D\kappa_1 &= \kappa_1(\rho_1 - 4\varepsilon_1 - \sigma_1) + \kappa_2(k\xi_1\xi_{1'} - k\xi_0\xi_{0'} - 2\sigma_2) +\\
&+ 2\Xi_1\sigma_2 - 2\Xi_2(\rho_1 + \sigma_1 + 2\varepsilon_1),\\
D\kappa_2 &= \kappa_2(\rho_1 - 4\varepsilon_1 + \sigma_1) - \kappa_1(k\xi_1\xi_{1'} - k\xi_0\xi_{0'}) +\\
&+ 2\Xi_1(\rho_1 - \sigma_1 + 2\varepsilon_1) - 2\Xi_2\sigma_2,\\
D(k\xi_0\xi_{0'}) &= 2a\xi_0\xi_{0'}(\rho_1 - \varepsilon_1) - \Xi_1\kappa_1 - \Xi_2\kappa_2,\\
D(k\xi_1\xi_{1'}) &= 2a\xi_1\xi_{1'}(\rho_1 - \varepsilon_1) + \Xi_1\kappa_1 + \Xi_2\kappa_2,\\
D\Xi_1 &= a\frac{\kappa_1}{2}(\xi_0\xi_{0'} - \xi_1\xi_{1'}) + 2\Xi_1(\rho_1 - \varepsilon_1) - \Xi_2\sigma_2,\\
D\Xi_2 &= a\frac{\kappa_2}{2}(\xi_0\xi_{0'} - \xi_1\xi_{1'}) + 2\Xi_2(\rho_1 - \varepsilon_1) + \Xi_1\sigma_2,
\end{aligned}$$

где $\Xi_1 = Re\, k\xi_0\xi_{1'}$, $\Xi_2 = Im\, k\xi_0\xi_{1'}$.

Не содержащие дифференциалов уравнение имеет вид:

$$L = -H/2 - \kappa_1^2 - \kappa_2^2 - 4\varepsilon_1\rho_1 + \rho_1^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 = 0.$$

Во **втором, третьем и четвертом разделах** то же самое проделано для VII, VIII и IX типов соответственно. Для них также удалось показать, что система уравнений Эйнштейна-Вейля является согласованной и интегрируемой. Исключение составляют только некоторые подслучаи VIII и IX типов, которые выделяются довольно громоздкими условиями, для которых совместность не удалось показать.

В **четвертой главе** "Однородные метрики Эйштейна-Вейля для I типа по Бианки" проведено точное интегрирование самосогласованной системы уравнений Эйнштейна-Вейля для однородных космологических моделей I тип по классификации Бианки.

В **первом разделе** построена тетрада Ньюмена-Пенроуза максимально общего вида:

$$\ell_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, A, B, C), \quad n_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -A, -B, -C),$$
$$m_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, K + iP, S + iM, V + iZ),$$

где $A, B, C, R, S, V, P, M, Z$ – произвольные функции от времени. Используя эту тетраду, найден явный вид спиновых коэффициентов. Поскольку имеется произвол в выборе трех вещественных функций, можно осуществить координатное преобразование (не выводящее из I типа и не нарушающее синхронной системы отсчета), которое сделает вейлевский спинор однокомпонентным и вещественным. Таким образом, на систему уравнений Эйнштейна - Вейля, накладываются условия максимальной простоты уравнений движения. Только в такой постановке задачи удается найти решение.

Во **втором разделе** интегрируются получившиеся полевые уравнения, находятся спиновые коэффициенты и спинор:

$$\begin{aligned}
&\lambda = -\overline{\sigma},\ \nu = \overline{\kappa},\ \pi = -\overline{\kappa},\ \gamma = -\overline{\varepsilon},\\
&\alpha = \overline{\beta},\ \mu = -\rho,\ \alpha = -\overline{\kappa},\\
&\rho = \frac{f}{x},\ \varepsilon = \frac{1/2 + f}{x},\ \sigma = \frac{b}{x}e^{ic},\ \kappa = \frac{a}{x},\\
&y{\xi_0}^2 = \frac{d}{x},
\end{aligned}$$

где $x = \sqrt{2}t$, d, a, b, c, f – константы интегрирования.

При этом тензор энергии-импульса имеет вид:

$$T_{00'00'} = 0, \quad T_{11'11'} = 0, \quad T_{00'11'} = 0, \quad T_{01'10'} = 0,$$
$$-T_{00'01'} = T_{01'11'} = ik{\xi_0}^2\kappa, \quad T_{01'01'} = ik{\xi_0}^2\sigma,$$

где k – константа.

В **третьем разделе**, используя полученные спиновые коэффициенты, находится тетрада. В ходе решения возникает следующая система дифференциальных уравнений:

$$0 \ = \ \frac{d^3V}{d\omega^3} - \frac{d^2V}{d\omega^2}l - \frac{dV}{d\omega}(b^2 + 4a^2 - 1) + V(4a^2b\alpha + l(b^2 - 1)),$$

$$U = \frac{-\frac{dV}{d\omega} + b\alpha V}{b\beta + 1}, \; W = \frac{\frac{d^2V}{d\omega^2} - (b^2-1)V}{2a(b\beta+1)}.$$

Здесь $\omega = dLn(x)$, $e^{ic} = \alpha + i\beta$, а искомые функции V, U, W имеют следующий вид:

$$\begin{cases} W = e^{f\omega/d}A, \\ U = e^{f\omega/d}K, \\ V = e^{f\omega/d}P. \end{cases}$$

Для остальных компонент тетрады возникают аналогичные системы, которые получаются из записанной следующими заменами:

$A \to B$, $K \to S$, $P \to M$ – одна система;

$A \to C$, $K \to V$, $P \to Z$ – другая система.

Следовательно, для того, чтобы найти тетраду, нам нужно решить систему уравнений, а затем выбрать различные константы интегрирования, для получения всех компонент тетрады.

Легко проинтегрировать первое уравнение получившейся системы, поскольку это обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Оно имеет следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - \lambda^2 l - \lambda(b^2 + 4a^2 - 1) + (4a^2 b\alpha + l(b^2-1)) = 0.$$

Здесь $l = (3f+1)/d$. Из него можно найти три корня λ_1, λ_2, λ_3

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = l \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = (b^2 + 4a^2 - 1) \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \; -(4a^2 b\alpha + l(b^2-1)) \end{cases}$$

Всего возможно четыре варианта:

1) λ_1, λ_2, λ_3 попарно неравны и вещественны, тогда

$$V = c_1 e^{\lambda_1\omega} + c_2 e^{\lambda_2\omega} + c_3 e^{\lambda_3\omega};$$

2) λ_1 - вещественный $\lambda_2 = \overline{\lambda_3}$

$$V = c_1 e^{\lambda_1\omega} + c_2 e^{\lambda_2\omega} + c_3 e^{\overline{\lambda_2}\omega};$$

3) λ_1, $\lambda_2 = \lambda_3$ - вещественный

$$V = c_1 e^{\lambda_1\omega} + (c_2 + c_3\omega)e^{\lambda_2\omega};$$

4) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

$$V = (c_1 + c_2\omega + c_3\omega^2)e^{\lambda\omega}.$$

Приведем вид тетрады для первого случая:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A & = & e^{-f\omega/d}\left[\frac{c_1 e^{\lambda_1\omega}({\lambda_1}^2-b^2+1)+c_2 e^{\lambda_2\omega}({\lambda_2}^2-b^2+1)+c_3 e^{\lambda_3\omega}({\lambda_3}^2-b^2+1)}{2a(b\beta+1)}\right] \\ K & = & e^{-f\omega/d}\left[c_1 e^{\lambda_1\omega}\frac{(b\alpha-\lambda_1)}{b\beta+1}+c_2 e^{\lambda_2\omega}\frac{(b\alpha-\lambda_2)}{b\beta+1}+c_3 e^{\lambda_3\omega}\frac{(b\alpha-\lambda_3)}{b\beta+1}\right] \\ P & = & e^{-f\omega/d}\left[c_1 e^{\lambda_1\omega}+c_2 e^{\lambda_2\omega}+c_3 e^{\lambda_3\omega}\right] \end{array} \right.$$

Где c_1, c_2, c_3 – константы интегрирования. Остальные функции, задающие тетраду, имеют аналогичный вид. Отличие заключается в том, что для них вместо c_1, c_2, c_3 следует выбрать другой набор произвольных констант.

В **Заключении** кратко сформулированы результаты, полученные в дисертации и вынесенные на защиту.

Основные научные результаты, выносимые на защиту

1. Исследованы условия совместности уравнений Эйнштейна для конформно - штеккелевых метрик. Показано, что нетривиальное конформное отображение штеккелевых пространств на пространства Эйнштейна возможно только для пространств типа (1.1) или конформно-плоских пространств.

2. Для однородных космологических моделей показано, что самосогласованная система уравнений Эйнштейна-Вейля является совместной и интегрируемой для всех типов по классификации Бианки (исключение состовляют VIII и IX типы).

3. Проинтегрирована система уравнений Эйнштейна-Вейля для I типа по классификации Бианки.

Апробация материалов диссертационной работы

Результаты, положенные в основу диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

— Научные семинары кафедры теоретической физики Томского государственного университета.

— Научные семинары кафедры теоретической физики Томского государственного педагогического университета.

— Second International Conference Quantum Field Theory and Gravity, July 28 - August 2 1997, Tomsk.

— Региональная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Сибирская школа молодого ученого", 21-23 декабря 1998, Томск.

— XI международная летняя школа-семинар по современным проблемам теоретической и математической физики "Волга - 11'99", 5-16 июля 1999, Казань.

— Международный конгресс "Наука, образование, культура на рубеже тысячелетий", 20-22 декабря 1999, Томск.

— IV межвузовская конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Наука и образование", 24-29 апреля 2000, Томск.

— V Межвузовская конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Наука и образование", 23 -26 апреля 2001, Томск.

— V International Conference on Gravitation and Astrophysics of Asian - Pacific Countries, 1 - 7 october 2001, Moskau.

Основные результаты диссертации

опубликованы в следующих работах:

1. Makarenko A.N., Obukhov V.V. Homogeneous solutions of the Einstein-Weyl equation //Second International Conference "Quantum field theory and Gravity" (July 28-August 2). - Томск. - 1997. - С. 298-304.

2. Макаренко А.Н., Обухов В.В. Космологическое решение уравнений Эйнштейна-Вейля. //Известия ВУЗов. Физика. - 1998. - 11. -С. 69-78.

3. Макаренко А.Н., Осетрин К.Е. Конформно-штеккелевы метрики пространств Эйнштейна //Изв. вузов. Физика. - 1999. - N. 10. - С. 34-43.

4. Макаренко А.Н. Неизотропные штеккелевы метрики в пространствах Эйнштейна// Труды региональной научно-практической конференции "Сибирская школа молодого ученого". Том IV. - Томск, 1999. - с. 4.

5. Макаренко А.Н., Обухов В.В., Осетрин К.Е. Условия совместности уравнений Эйнштейна для конформно-штеккелевых метрик //Новейшие проблемы теории поля. 1999-2000. Труды международной летней школы-семинара по современным проблемам теоретической и математической физики. - Казань. - 2000. - С. 215-226.

6. Макаренко А.Н. Однородные космологические модели //Труды второй сибирской школы молодого ученого. Том II. Математика, Физика, Информационные технологии. - Томск. - 2000. - С. 9-13.

2-

Лицензия ЛР 020557 от 28.05.92 года

Подписано в печать: 26.11.2001 г. Бумага: для ксерокса
Тираж: 100 экз. Заказ: №47/X
Печать: RISO Формат: 60x84/16

Издательство Томского государственного
педагогического университета
634041, г. Томск, пр. Комсомольский, 75, оф. 254 а
Тел. (3822) 52-24-77, E-mail: publish@tspu.edu.ru

Издательство ТГПУ